

Article

Stationäre Punkte auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten.
Threlfall, W.

in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung |
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung - 51
20 Page(s) (14 - 33)



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

[DigiZeitschriften e.V.](#)

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

5. W. R. Hamiltons Arbeiten zur Strahlenoptik und analytischen Mechanik. Abh. d. Leop.-Carol. D. Akad. d. Naturf. **107** (1923), S. 1—35.
6. C. H. Müller und G. Prange, Allgemeine Mechanik. Hannover (1923), 551 S.
7. W. R. Hamiltons Abhandlungen zur Strahlenoptik. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von G. Prange. Leipzig (1933), 429—117 S.
8. Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Enzykl. d. math. Wiss. IV 12—13 (1935), S. 505—804.
9. Zur dreihundertjährigen Wiederkehr des Erscheinens von Galileis Diskorsi. Forschungen u. Fortschritte **14** (1938), S. 138—140.

In Vorbereitung:

10. Vorlesungen über Integral- und Differentialrechnung. 2. Bd. (Springer).
11. Vorlesungen über Geodätische Linien.

(Eingegangen am 24. 3. 1941.)

Stationäre Punkte auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten.

Vortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
in Baden-Baden.

Von W. THRELFALL in Frankfurt a. M.

Mit 7 Figuren.

Wir werden hier nichts wesentlich Neues vorbringen und nichts beweisen, sondern auf wichtige Ergebnisse und fruchtbare Probleme der Analysis im Großen hinweisen, die man Herrn Marston Morse verdankt¹⁾, und in denen sich die Ideen von Henri Poincaré²⁾ entfalten. Das Anschauungsmaterial ist leicht darzulegen; nicht so leicht ist die mathematische Behandlung des Gegenstandes³⁾ durchzuführen.

§ 1. Morsesche Formeln für nichtausgeartete stationäre Punkte.

Gegeben eine zweimal stetig differenzierbare Funktion J auf einer geschlossenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit Ω , also etwa auf einer geschlossenen Fläche ($n = 2$). Die Punkte, in denen die sämtlichen n ersten Ableitungen von J nach den lokalen Gaußschen Koordinaten verschwinden, heißen *stationäre Punkte*. Es handelt sich darum, Be-

1) M. Morse, Functional topology and abstract variational theory. Mém. sci. Math. (Paris 1938), mit Literaturangaben.

2) H. Poincarés bekannte Arbeiten zur Analysis situs, z. B. Vme Complément, Rend. Circ. math. Palermo **18** (1904).

3) Man vergleiche z. B. H. Seifert und W. Threlfall, Variationsrechnung im Großen (Hamburger Einzelschrift 24, Leipzig 1938) oder W. Threlfall, Le calcul des variations global. (L'enseignement mathématique 1941.) Auch der vorliegende Vortrag ist im Gedankenaustausch mit Herrn H. Seifert entstanden.

ziehungen zwischen der Art und Zahl der stationären Punkte von J und den Zusammenhangsverhältnissen von Ω aufzustellen. Die Zusammenhangsverhältnisse sind dabei allein durch das sogenannte topologische Verhalten der Mannigfaltigkeit bestimmt und ändern sich z. B. nicht, wenn man die Mannigfaltigkeit in irgendeinen Raum einlagert und darin deformiert.

Man kann Art und Zahl der stationären Punkte von J nicht willkürlich vorschreiben; durch die Gestalt von Ω sind gewisse Beschränkungen gegeben. Das ist naheliegend. Betrachten wir z. B. als Mannigfaltigkeit Ω die Kugelfläche, die wir uns als Erdkugelfläche denken, und als Funktion J darauf die Höhe eines Ortes über dem Meere. Wenn es dann auf der Erde nur einen einzigen Berg gibt, der seine höchste Erhebung über dem Nordpol N hat und über die ganze Erde bis zum Südpol S hin auf Meereshöhe abfällt (Fig. 1 zeigt die Verhältnisse an einem Meridianschnitte; die Erdkugel ist horizontalgestrichelt), so haben wir an stationären Punkten einen Maximalpunkt N und einen Minimalpunkt S von J . Wenn wir jetzt nebeneinander zwei Berge anbringen, so erhalten wir zwei Maxima, das eine Minimum bleibt erhalten, aber zwischen den beiden Bergen tritt notwendig ein Paß oder Sattelpunkt auf. Ebenso hätten wir notwendig einen Sattelpunkt erhalten, wenn wir ein zweites Minimum durch Einbeulen der Oberfläche angebracht hätten. Mit jedem neuen Minimum oder Maximum kommt also auch ein Sattelpunkt zu den stationären Punkten hinzu. Wie viele Gipfel und Senken wir auch anbringen, immer gilt daher für die

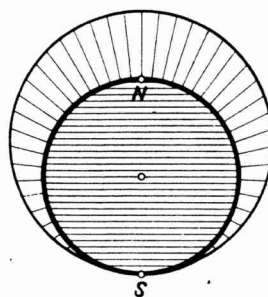


Fig. 1.

Anzahl der Minima M^0 ,
 Anzahl der Sattelpunkte M^1 ,
 Anzahl der Maxima M^2

die *Kroneckersche Formel*

$$-M^0 + M^1 - M^2 = -2.$$

Dabei haben wir freilich vorausgesetzt, daß die stationären Punkte isoliert sind; das wollen wir hinfort immer tun.

Wir bleiben noch bei den Flächen, wenden uns aber einem weniger trivialen Beispiele zu. Eine Ringfläche liege im xyz -Raum und habe die x -Achse zur Rotationsachse. An ihr seien vier Fortsätze angebracht, so daß die durchlochte Fischblase der Fig. 2 entsteht. Die

Funktion J sei die Höhe $J = z$ über der xy -Ebene. Die stationären Punkte sind dann die Punkte, in denen die Tangentialebene an die Fläche horizontal liegt. Es gibt deren im ganzen acht, zu denen die J -Werte $\gamma_1, \dots, \gamma_8$ der Fig. 2 gehören, und sie lassen sich wieder in drei Arten einteilen: zwei sind Minima, vier Sattelpunkte, zwei Maxima.

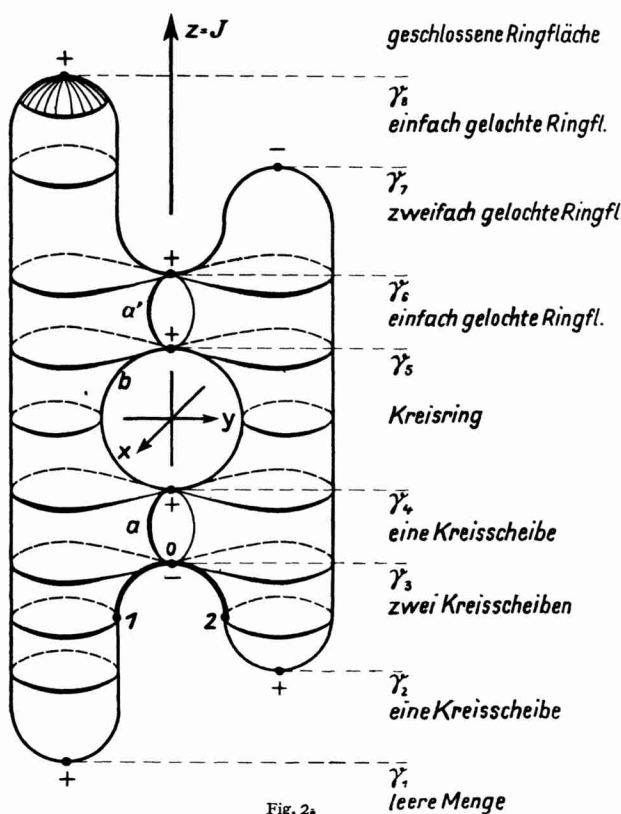


Fig. 2a

Diese Einteilung benutzt nur die unmittelbare Umgebung des stationären Punktes: wenn wir den Verlauf der Funktion J in einer noch so kleinen Umgebung eines stationären Punktes kennen, können wir entscheiden, ob es sich um ein Minimum, einen Sattelpunkt oder ein Maximum handelt. Wir wollen den Unterschied dieser drei Punktarten analytisch erfassen und ihn so gleich auf n -dimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Wir setzen die Funktion J zwei-

mal stetig differenzierbar in den lokalen Koordinaten voraus. Dann können wir sie bis zu den Gliedern zweiter Ordnung nach Taylor entwickeln. Machen wir den stationären Punkt zum Anfangspunkt der lokalen Koordinaten, so schreitet die Reihe nach Potenzen der lokalen Koordinaten fort. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß im stationären Punkte $y = 0$ wird; dann fällt das absolute Glied weg. Weil der Punkt stationär ist, gilt Gleiches von den Gliedern erster Ordnung. Die Entwicklung

beginnt also mit den Gliedern zweiter Ordnung. Diese bilden eine quadratische Form, die wir durch lineare Transformation der lokalen Koordinaten auf Hauptachsen bringen wollen. Ist die Form nichtausgeartet, d. h. die Koeffizientendeterminante $\neq 0$, so nennen wir den stationären Punkt *nichtausgeartet*. Der Trägheitsindex der quadratischen Form, also die Anzahl der negativen Quadrate in der Normalform, wird dann als *Trägheitsindex des stationären Punktes* bezeichnet. In einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist er offenbar für ein Minimum $= 0$, für ein Maximum $= n$, für einen Sattelpunkt unserer zweidimensionalen Beispiele ist er $= 1$.

Damit haben wir die nichtausgearteten stationären Punkte nach einer Eigenschaft im Kleinen eingeteilt.

Wir kehren zu unserem Beispiel der Fig. 2 zurück und wollen seine stationären Punkte jetzt nach einer Eigenschaft im Großen feiner einteilen. Wir werden dabei zugleich eine Beziehung zu den Zusammenhangsverhältnissen unserer Fläche gewinnen. Wir tauchen zu dem Zwecke die Fläche in Wasser ein bis zur Höhe $J = c$ und sehen uns den benetzten Teil an. Er wird von allen Punkten gebildet, für die $J \leq c$ ist; wir bezeichnen diesen Teil mit

$$\{J \leq c\}.$$

Wenn wir das Wasser steigen lassen, so ändern sich die Zusammenhangsverhältnisse des benetzten Teiles offenbar immer nur dann, wenn der Wasserspiegel einen stationären Punkt übersteigt.

Übersteigt der Wasserspiegel das absolute Minimum, so wird der benetzte Teil, der vorher leer war, ein Flächenstück vom gleichen Zusammenhange wie die Kreisscheibe. Wir sagen dann, daß die 0-te Zusammenhangszahl r^0 sich von 0 auf 1 erhöht hat. Als Zusammenhangszahl der Dimension 0 eines Flächenkomplexes bezeichnet man nämlich die Anzahl der zusammenhängenden isolierten Teilbereiche, aus denen der Flächenkomplex besteht. — Übersteigt der Wasserspiegel das relative Minimum von der Höhe $c = \gamma_2$, so erhöht sich r^0 auf 2; $\{J \leq c\}$ besteht danach aus zwei getrennt liegenden, topologischen Kreisscheiben.

Wir nennen einen stationären Punkt, bei dessen Überschreiten sich eine Zusammenhangszahl erhöht, von *aufsteigendem Typus*. Die Minima sind also stationäre Punkte von aufsteigendem Typus, da sich die nullte Zusammenhangszahl in ihnen erhöht. Der nächste stationäre Punkt, der Sattelpunkt des J -Wertes γ_3 , ist offenbar von absteigendem Typus, denn die 0-te Zusammenhangszahl erniedrigt sich dadurch, daß die beiden topologischen Kreisscheiben wieder zu einer ver-

schmelzen, zum Werte $r^0 = 1$. Wir haben das durch ein beigesetztes Minuszeichen in der Fig. 2 angedeutet.

Die Zusammenhangszahl der Dimension 1 war bisher stets $r^1 = 0$, da jede geschlossene Kurve auf einer Kreisscheibe ein Teilstück der Kreisscheibe berandet, wofür man auch sagt: die geschlossene Kurve ist nullhomolog (vgl. § 2). Dies wird anders, wenn der Wasserspiegel den zweiten Sattelpunkt des J -Wertes γ_4 überschreitet. Dann schnürt sich der Rand unserer Kreisscheibe zusammen und zerfällt in zwei Ränder. Der benetzte Teil $\{J \leq c\}$ wird jetzt ein von zwei Kreislinsen berandetes Flächenstück, und zwar ein Schlauch oder Zylinder oder, was topologisch dasselbe ist, ein Kreisring.

Die Zusammenhangszahl der Dimension 0 bleibt, wie hinfert immer, $r^0 = 1$, denn $\{J \leq c\}$ besteht immer aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke. Die Zusammenhangszahl der Dimension 1, r^1 , erhöht sich dagegen auf den Wert $r^1 = 1$. Denn es tritt genau eine Klasse nichtberandender geschlossener Kurven auf; zu ihnen gehört z. B. in einem metrischen Kreisringe die Seele, ein zwischen den beiden Randkreisen verlaufender, zu ihnen konzentrischer Kreis (Mittellinie). In unserem Beispiel (Fig. 2) wird die Seele z. B. durch den „Meridiankreis“ a repräsentiert. Da sich die erste Zusammenhangszahl erhöht hat, ist der zweite Sattelpunkt von aufsteigendem Typus.

Das gleiche gilt vom dritten Sattelpunkt des J -Wertes γ_5 . Hier verwandelt sich der Schlauch durch Vereinigung der beiden Ränder zu einer Ringfläche mit einem Loch. Es wird $r^1 = 2$. Die zweite Klasse geschlossener nichtberandender Kurven wird vertreten durch den Breitenkreis b der Ringfläche. Er berandet auch zusammen mit a kein Teilflächenstück von $\{J \leq c\}$ ($\gamma_5 < c < \gamma_6$), wofür man auch sagt, daß die beiden geschlossenen Kurven a und b homolog unabhängig sind auf $\{J \leq c\}$.

Im höchsten Sattelpunkte wird schließlich $r^1 = 3$, da die einfach gelochte Ringfläche in eine zweifach gelochte übergeht. Die Klasse der neu hinzutretenden geschlossenen Kurven wird z. B. vertreten durch den Meridiankreis a' , der homolog unabhängig von a und b ist. Der zweite, dritte und vierte Sattelpunkt sind deshalb von aufsteigendem Typus.

Dagegen ist das relative Maximum vom J -Werte γ_7 von absteigendem Typus. r^1 geht vom Werte 3 auf den Wert $r^1 = 2$ dadurch zurück, daß sich das eine Loch der Ringfläche schließt. Der Meridiankreis a' läßt sich jetzt über das relative Maximum in den Meridiankreis a deformieren, wird also zu a homolog und scheidet damit aus der Zahl der homolog unabhängigen Kurven aus.

Das absolute Maximum ist wieder von aufsteigendem Typus. Diesmal ändern sich zwar r^0 und r^1 nicht. Dagegen erhöht sich die zweite Zusammenhangszahl. Sie war bisher $= 0$, weil es auf dem benetzten Teile keine geschlossene Fläche gab. Für $J = \gamma_8$ schließt sich dagegen die ganze Fläche, und diese geschlossene Fläche berandet kein dreidimensionales Raumstück (sie ist nicht nullhomolog auf dem benetzten Teil), weil es für unsere Betrachtungen gar keine dreidimensionalen Raumstücke gibt. Die Einbettung der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in den euklidischen Raum ist nur ein Zugeständnis an die Anschauung. — Es ist daher $r^2 = 1$ für $\{J \leq \gamma_8\}$.

Wir kennzeichnen wieder Minimum, Sattelpunkt und Maximum durch die oberen Indizes 0, 1 und 2 und fügen als unteren Index ein $+$ oder $-$ an die Anzahlen M^k an, um auf- und absteigenden Typus zu unterscheiden. Wir haben also

$$(1) \quad M^k = M_+^k + M_-^k \quad (k = 0, 1, 2).$$

In unserem Beispiele setzen sich die Gesamtzahlen der Minima, Sattelpunkte und Maxima folgendermaßen aus Punkten von auf- und absteigendem Typus zusammen:

$$\begin{aligned} m^0 &= M_+^0, & M^1 &= M_+^1 + M_-^1, & M^2 &= M_+^2 + M_-^2 \\ &= 2 & &= 3 + 1 & &= 1 + 1. \end{aligned}$$

Andererseits erkennen wir, wie sich in unserem Beispiele die Zusammenhangszahlen von $\{J \leq c\}$ beim Überschreiten eines stationären Punktes ändern: Das Überschreiten eines stationären Punktes vom oberen Index k und von aufsteigendem Typus vermehrt die Zusammenhangszahl r^k um eine Einheit. Beim Überschreiten eines stationären Punktes vom Index $k + 1$ und von absteigendem Typus erniedrigt sich dagegen die Zusammenhangszahl der Dimension k um eine Einheit.

Steht nun der Wasserspiegel unter dem absoluten Minimum, so ist die benetzte Fläche leer, alle Zusammenhangszahlen sind $= 0$. Wenn man daher alle Änderungen ΔR^k der Zusammenhangszahlen addiert, die nacheinander erfolgen, wenn der Wasserspiegel bis über das absolute Maximum steigt, so erhält man die Zusammenhangszahlen R^k der ganzen Fläche. Es ist daher

$$(2) \quad \sum \Delta R^k = R^k = M_+^k - M_-^{k+1} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Es ist stets $M_-^0 = 0$, d. h. ein Minimum ist immer von aufsteigendem Typus.

Für unser Beispiel fassen wir die Änderungen ΔR^k der Zusammenhangszahlen bei Überschreiten der acht stationären Punkte noch einmal in einer Tabelle zusammen:

	$k = 0$		$k = 1$				$k = 2$		
	Minima		Sattelpunkte				Maxima		
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	
ΔR^0	1	1	-1	0	0	0	0	0	$(\sum \Delta R^0 = 1 = R^0)$
ΔR^1	0	0	0	1	1	1	-1	0	$(\sum \Delta R^1 = 2 = R^1)$
ΔR^2	0	0	0	0	0	0	0	1	$(\sum \Delta R^2 = 1 = R^2)$

Als Zusammenhangszahlen der gesamten Fläche $R^k = \sum \Delta R^k$ erhält man in der Tat die Zusammenhangszahlen der Ringfläche.

In Formel (1) und (2) haben wir nun schon die Morseschen Formeln für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. In diesem Fall können wir M_+^k und M_-^k aus (1) und (2) eliminieren, indem wir die Wechselsumme über R^k bilden; es ergibt sich dann, da immer $M_-^0 = 0$ ist, die *Kroneckersche Formel für geschlossene Flächen beliebigen Geschlechts*

$$(3) \quad -M^0 + M^1 - M^2 = -R^0 + R^1 - R^2 = N.$$

Die rechte Seite N ist nach bekannten Sätzen der Topologie⁴⁾ die Eulersche Charakteristik der Fläche, die einerseits mit der Henkelzahl h , andererseits mit den Ecken-, Kanten- und Flächenzahlen $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$ einer polyedralen Zerlegung der Fläche zusammenhängt, und zwar nach der Gleichung

$$N = 2(h - 1) = -\alpha^0 + \alpha^1 - \alpha^2.$$

Unsere Betrachtungen lassen sich auf beliebige Dimensionszahl übertragen. Wer diese Übertragung nicht an sich interessant findet, der möge bedenken, daß eine noch viel weiter gehende Übertragung für Zwecke der Variationsrechnung notwendig ist. Wir wollen daher wenigstens den dreidimensionalen Fall an einem Beispiel erläutern. Unserer Anschauung steht dann kein höherdimensionaler Raum zur Verfügung, in den wir die dreidimensionale Mannigfaltigkeit so bequem einbetten können, wie die geschlossenen Flächen in den dreidimensionalen euklidischen Raum. Um uns zu helfen, schneiden wir ein Stück aus der Mannigfaltigkeit heraus, das den betrachteten stationären Punkt enthält, und bilden es auf den dreidimensionalen euklidischen Raum ab, indem wir die lokalen Koordinaten x_1, x_2, x_3 , auf die

4) H. Seifert und W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934. S. 87.

eine gewisse Umgebung des stationären Punktes bezogen ist, zu kartesischen Koordinaten des euklidischen Raumes machen.

Die Funktion J sei in der Umgebung des stationären Punktes durch

$$J = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

gegeben. Der Nullpunkt ist offenbar ein isolierter stationärer Punkt vom Trägheitsindex $k = 2$. Die zweidimensionalen Niveauflächen $J = c = \text{const.}$, in denen der jetzt dreidimensionale Wasserspiegel unsere dreidimensionale Mannigfaltigkeit schneidet, sind für $c < 0$ einschalige, für $c > 0$ zweischalige Hyperboloide (Fig. 3). Steigt also der Wasserspiegel über den Wert $c = 0$ hinweg, so schnürt sich der zweidimensionale Rand des Bereiches $\{J \leq c\}$ — entsprechend dem Verhalten im Sattelpunkt des J -Wertes γ_4 der Fig. 2 — zusammen, und es schließt sich damit das Loch, das durch die Umgebung des stationären Punktes längs der x_3 -Achse hindurchging, solange $\{J < 0\}$ war.

Wir verfeinern die Einteilung der stationären Punkte vom Trägheitsindex $k = 2$ nach ihrem Verhalten im Großen, indem wir sie in zwei Klassen einteilen. In Fig. 3 sei C eine Kurve, die den Kegel $J = 0$ einmal umschlingt und also im „äußeren“ Ringbereich $\{J < c\}$ eines einschaligen Hyperboloids liegt ($c < 0$). Es kann dann sein, daß C in dem Bereich $\{J < 0\}$ unserer Mannigfaltigkeit Rand einer Fläche ist, die sich sozusagen außenherum in C einspannen läßt. Ob das der Fall ist oder nicht, läßt sich an der ausgeschnittenen Umgebung des stationären Punktes nicht erkennen, sondern hängt vom Verlauf der Funktion J und der Gestalt der ganzen Mannigfaltigkeit ab. Wenn sich aber in die Kurve C eine Fläche im Bereich $\{J < 0\}$ einspannen läßt, so wird man diese von C berandete Fläche innerhalb $\{J < c\}$ durch die von C berandete Kreisscheibe schließen können, sobald c den Wert 0 überschreitet. Dann hat sich die Zusammenhangszahl der Dimension 2 um eine Einheit erhöht, und wir nennen den Punkt von aufsteigendem Typus. Läßt sich dagegen keine Fläche einspannen, so berandet die

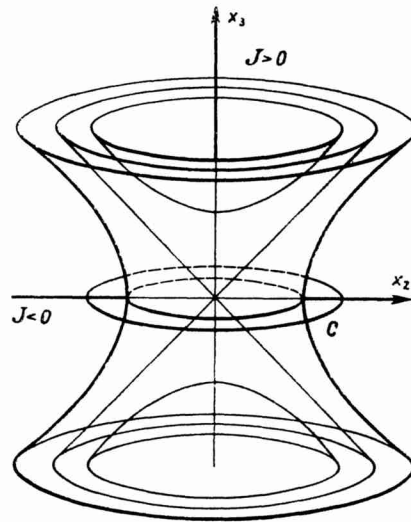


Fig. 3.

Kurve C in $\{J < 0\}$ nicht, ist dort nicht nullhomolog; sie wird aber berandend, sobald J den Wert 0 überschreitet. Dann sinkt die Zusammenhangszahl der Dimension $k - 1 = 1$ um eine Einheit, und der stationäre Punkt heißt von absteigendem Typus.

Man kann sich dieses Verhalten an folgenden beiden im einzelnen durchführbaren Beispielen klarmachen. Die geschlossene Mannigfaltigkeit Ω sei die dreidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^3$, also topologisch der durch einen einzigen unendlich fernen Punkt geschlossene euklidische Raum. Wir wählen als lokale Koordinaten kartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 des euklidischen Raumes, die alle Punkte von $\mathbb{S}^3$ mit Ausnahme eines einzigen, des „unendlich fernen“, erfassen. In ihnen laute die Funktion J

$$J = \frac{-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \pm (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4}.$$

Für das eine Beispiel soll das Plus-, für das andere das Minuszeichen im Zähler gelten. Im unendlich fernen Punkte habe J den Wert 0. Dann ist J in der ganzen Mannigfaltigkeit zweimal stetig differenzierbar (sogar analytisch). Der Nullpunkt ist ein stationärer Punkt vom Index $k = 2$. Für das Pluszeichen ist er von absteigendem, für das Minuszeichen von aufsteigendem Typus, was man aus dem Verlauf der Fläche $J = 0$ ersieht.

Betrachten wir ferner die Funktion

$$J = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

in der Umgebung des Nullpunktes. Der stationäre Nullpunkt hat den Index $k = 1$. Wenn er von aufsteigendem Typus ist, ergibt sich bei Überschreiten von $J = 0$ in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ein neuer nicht nullhomologer eindimensionaler Zykel, die alsdann geschlossen zu denkende x_3 -Achse. Im anderen Fall fällt ein zuvor nicht nullhomologer nulldimensionaler Zykel (bestehend aus je einem Punkt im Vor- und Nachkegel) dadurch fort, daß die beiden Punkte sich in $\{J \leq c\}$ ($c > 0$) über den Nullpunkt hinweg durch eine Strecke verbinden lassen, der nulldimensionale Zykel also nullhomolog wird.

Allgemein wollen wir annehmen, daß auf unserer Mannigfaltigkeit der Dimension n M^k stationäre Punkte vom Index k vorhanden sind und daß darunter M_+^k aufsteigenden und M_-^k absteigenden Typus haben:

$$(1') \quad M^k = M_+^k + M_-^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Dann gelten wie im zweidimensionalen Fall die Beziehungen

$$2') \quad R^k = M_+^k - M_-^{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$M_-^0 = 0,$$

Wir eliminieren die Zahlen M_+ , indem wir die Gleichungen (1') und (2') subtrahieren:

$$\begin{aligned} M^k &= R^k + M_-^k + M_-^{k+1}, & (k = 0, 1, \dots, n) \\ M_-^0 &= M_-^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

$$(5) \quad M^k \geq R^k,$$

Wir bilden ferner die Wechselsumme aus den ersten beiden, aus den ersten drei, aus den ersten vier usw. Formeln von (4). Wir erhalten $n + 1$ Gleichungen oder, wenn wir von den Zahlen M^k nur benutzen, daß sie ≥ 0 sind, n Ungleichungen und eine Gleichung, die die Verallgemeinerung der Kroneckerschen Formel auf n Dimensionen, die sog. *Morseschen Formeln*, bilden:

$$\begin{aligned}
(6) \quad & -M^0 &= -R^0 + M_-^1 &\geq -R^0 \\
& M^0 - M^1 &= R^0 - R^1 + M_-^2 &\geq R^0 - R^1 \\
& -M^0 + M^1 - M^2 &= -R^0 + R^1 - R^2 + M_-^3 &\geq -R^0 + R^1 - R^2 \\
& \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
& -M^0 + M^1 - \dots + (-1)^{n-1}M^n = \\
& &= -R^0 + R^1 - \dots + (-1)^{n-1}R^n = N.
\end{aligned}$$

§ 2. Typenzahlen.

Die Beispiele stationärer Punkte, an denen wir bisher die Morse-schen Formeln illustriert haben, beziehen sich alle auf den einfachsten Fall; es handelte sich immer um nichtausgeartete stationäre

Punkte. Wir müssen indessen auch ausgeartete Punkte in Betracht ziehen, wie etwa den Nullpunkt der Funktion

$$J = 3x^2y - y^3$$

in der xy -Ebene. Hier fallen die quadratischen Glieder in der Taylorentwicklung ganz fort. Allgemein heißt ein stationärer Punkt *ausgeartet*, wenn die quadratische Form, die die quadratischen Glieder der Taylorentwicklung bilden, ausgeartet ist, d.h. verschwindende Koeffizientendeterminante hat.

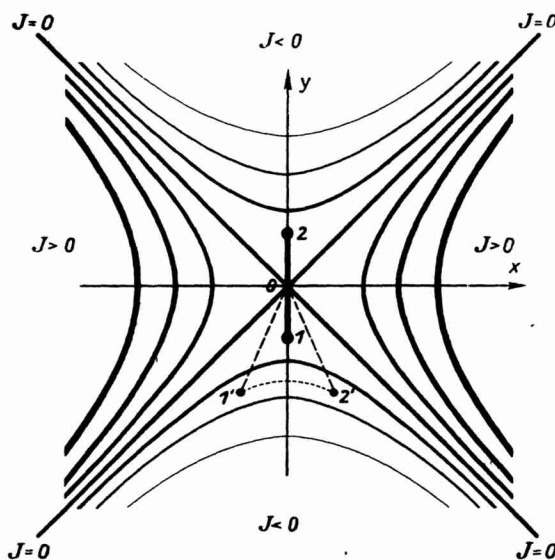


Fig. 4.

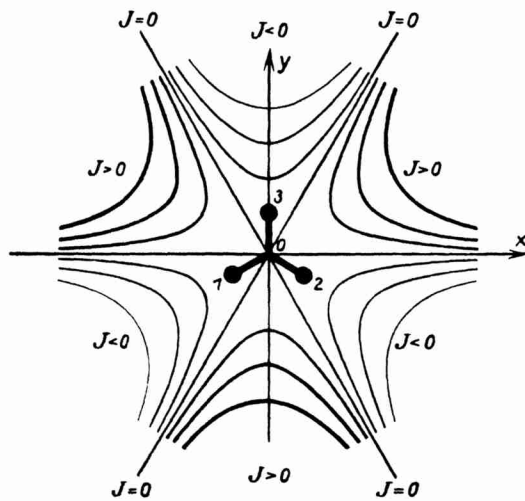


Fig. 5.

Setzen wir $J = z$, um die als Beispiel benutzte Funktion J in der Umgebung des stationären Punktes durch eine Fläche des xyz -Raumes darzustellen, so erhalten wir einen Affensattel, einen Sattel, der noch einen Ausschnitt an der Rückenlehne für den Affenschwanz hat.⁵⁾

Wir ziehen es vor, die Fläche in kotierter Projektion in der xy -Ebene darzustellen. Da ergibt sich, wenn es sich um einen gewöhnlichen Sattelpunkt handelt, das bekannte Bild der Fig. 4 für die Niveaulinien $J = \text{const.}$, und im Falle des Affensattels die Fig. 5. Je kleineren J -Wert eine Kurve

5) Hilbert, Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie. (Grundlehren der math. Wiss. Bd. 37.) Berlin 1932, S. 179.

$J = \text{const.}$ hat, um so schwächer ist sie in den Figuren ausgezogen worden.

Die Schwierigkeiten beginnen erst, wenn wir auch für ausgeartete Punkte die Morseschen Formeln ableiten wollen. Denn dann versagt unsere einfache Einteilung nach dem Trägheitsindex der quadratischen Glieder. Sie wird durch eine topologische Einteilung ersetzt. Das ist der wesentliche Gedanke, dem wir uns jetzt zuwenden, um die Morseschen Formeln allgemein abzuleiten.

Wir haben einerseits topologische Invarianten der Mannigfaltigkeit Ω zu benutzen. Das werden wie bisher die Zusammenhangszahlen R^k sein. Andererseits sind die stationären Punkte topologisch zu klassifizieren. Das geschieht durch die Typenzahlen m^k , von denen jeder stationäre Punkt eine von jeder Dimension besitzt.

Was die *Zusammenhangszahlen* R^k betrifft, so werden sie, wie wir das schon an Beispielen gesehen haben, nach dem allgemeinen Verfahren der Topologie definiert: da man topologische Eigenschaften einer gegebenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit Ω meist nicht unmittelbar erkennen kann, legt man einfache und wohlbekannte niederdimensionale Gebilde, z. B. Kurven oder Flächen, allgemeiner sog. k -dimensionale Ketten in Ω hinein und studiert die Möglichkeiten, die sich da ergeben. Das wichtigste Ergebnis dieses Studiums bildet die *Homologietheorie*. Einige wenige Begriffe sind für sie so grundlegend wie die Potenzreihe und die Riemannsche Fläche für die Funktionentheorie, nämlich die Kette und ihre Addierbarkeit und die Randbildung.

Unter einer 0-dimensionalen Kette oder kurz 0-Kette versteht man eine endliche Menge einzelner Punkte der Mannigfaltigkeit. Bei einer 1-Kette denken wir an eine oder mehrere Kurven, bei einer 2-Kette an berandete oder geschlossene Flächen — womit wir freilich keine Definition geben wollen. Die Definition hätte die *Kette* der Dimension 1, 2, 3, n als System stetiger Bilder von Strecken bzw. Dreiecken, Tetraedern, allgemein n -dimensionalen Simplexen einzuführen. Wir begnügen uns indessen mit dem Anschauungsmaterial.

Die k -Ketten lassen sich nun in gewissem Sinne untereinander addieren. Das Nullelement der *Addition* ist die k -Kette 0, die leere Punktmenge.

Jeder k -Kette kommt ein *Rand* zu, das ist eine $(k - 1)$ -Kette. Ist er die $(k - 1)$ -Kette 0, so heißt die k -Kette geschlossen oder ein k -Zykel. Die Randkette einer Strecke z. B. ist der 0-Zykel, der von den beiden Randpunkten gebildet wird.

Nun ist es wesentlich, daß wir unsere Ketten nicht orientieren. Da wir von der Kettenaddition und der Randbildung verlangen, daß der Rand der Summe gleich der Summe der Ränder ist, so hat das zur Folge, daß die Addition *zweier Ketten modulo 2* erfolgt. Setzen wir z. B. zwei Dreiecke, die längs einer Kante aneinandergrenzen, zu einem Viereck zusammen, so tritt die gemeinsame Randkante in der Summe der Ränder doppelt auf, sie kommt aber im Rande der Summe, im Rande des Vierecks, nicht mehr als Randkante vor. Jede in einer Summe doppelt auftretende k -Kette wird daher gleich der k -Kette 0 gesetzt.

Jede k -Kette, die Rand einer $(k+1)$ -Kette ist, ist geschlossen, ein k -Zykel, aber nicht jeder k -Zykel ist Rand einer $(k+1)$ -Kette. Z. B. ist der Meridiankreis einer Ringfläche ein 1-Zykel auf der Ringfläche, der nicht ein Stück der Ringfläche berandet. Ist ein k -Zykel dagegen Rand einer $(k+1)$ -Kette, so heißt er berandend oder *nullhomolog*.

Zwei k -Ketten, die zusammen Rand einer $(k+1)$ -Kette sind, heißen einander *homolog*. Damit zwei k -Ketten homolog sind, ist notwendig, daß sie denselben Rand haben, und es ist hinreichend, aber keineswegs notwendig, daß sie sich bei festgehaltenem Rand ineinander deformieren lassen.

Ein System von k -Zykeln, die zusammen keine $(k+1)$ -Kette beranden, heißt ein System *homolog unabhängiger* k -Zykeln. Die k -te *Zusammenhangszahl* von Ω ist dann die maximale Anzahl homolog unabhängiger k -Zykeln, die es in Ω gibt. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit hat Zusammenhangszahlen von jeder der Dimensionen $0, 1, 2, \dots$, doch sind diese Zahlen von der Dimension $n+1$ an offenbar alle gleich 0.

Wir gehen zur topologischen Einteilung der stationären Punkte über. Zwei stationäre Punkte, die zu den stationären J -Werten γ und γ' gehören mögen, werden wir dann in dieselbe Klasse tun, wenn es Umgebungen von ihnen gibt, die sich topologisch und so aufeinander abbilden lassen, daß die Teilmengen, in denen J kleiner, gleich oder größer als im stationären Punkte ist, ineinander übergehen. Ob eine solche Abbildung möglich ist, also die Homöomorphie der Teilmengen, in denen $J \leq \gamma$ bzw. $J \leq \gamma'$ ist, können wir ebensowenig entscheiden wie die Homöomorphie ganzer n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten im Falle $n > 2$.

Um aber notwendige Bedingungen für die topologische Abbildbarkeit zu ermitteln, gehen wir ebenso vor wie bei den ganzen Mannigfaltigkeiten. Den Zusammenhangszahlen der Dimension k der Mannig-

faltigkeit werden jetzt Typenzahlen der Dimension k des stationären Punktes entsprechen, und wir erhalten sie, indem wir in die Teilmenge $\{J \leq \gamma\}$ unserer Umgebung des stationären Punktes k -Zykeln hineinlegen und die Maximalzahl der homolog unabhängigen von ihnen bestimmen.

Freilich können wir jetzt nicht wie auf der ganzen Mannigfaltigkeit Zykeln im Großen verwenden. Da es uns nur auf eine beliebig kleine Umgebung ankommt, legen wir durch den stationären Punkt nur Stücke von k -Zykeln, sog. *relative k -Zykeln* hindurch. Alle Teilketten oder Randketten, die unterhalb des stationären J -Wertes γ liegen, interessieren uns nicht. Wir achten sie daher der k -Kette 0 gleich und nennen deshalb unsere relativen k -Zykeln auch Zykeln mod $\{J < \gamma\}$: sie sind nur bestimmt bis auf Ketten, die ganz unterhalb γ liegen. Solche kann man ohne den relativen Zykel zu ändern, beliebig hinzuaddieren oder weglassen.

Beispiel: eine 1-Kette, also ein Kurvenstück, das über einem gewöhnlichen Sattelpunkt hängt, etwa die stark ausgezogene Strecke 1 0 2 der Fig. 4 und der Fig. 2, werden wir als relativ geschlossen oder als relativen 1-Zykel von $\{J \leq \gamma\}$ mod $\{J < \gamma\}$ bezeichnen, da die beiden Randpunkte ganz unterhalb γ liegen (γ ist in Fig. 4 = 0, in Fig. 2 = γ_3).

Einander *homolog* werden wir zwei relative k -Zykeln nennen, wenn sie allein oder mit geeigneten ganz unterhalb γ gelegenen k -Ketten zusammen, die wir ja beliebig hinzuaddieren dürfen, eine $(k+1)$ -Kette von $\{J \leq \gamma\}$ beranden. Insbesondere ändert sich die Homologiekategorie eines relativen Zykels mod $\{J < \gamma\}$ nicht, wenn wir den in $\{J < \gamma\}$ gelegenen Teil innerhalb $\{J < \gamma\}$ beliebig deformieren.

Homolog unabhängig nennen wir nun wieder ein System relativer k -Zykeln mod $\{J < \gamma\}$, wenn keine Homologie mod $\{J < \gamma\}$ zwischen den Zykeln besteht, und die maximale Anzahl homolog unabhängiger relativer k -Zykeln von $\{J \leq \gamma\}$ mod $\{J < \gamma\}$ ist jetzt die *k -te Typenzahl* des stationären J -Wertes γ oder des stationären Punktes, der, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, der einzige des J -Wertes γ ist.

Der gestrichelte relative 1-Zykel 1' 0 2' der Fig. 4 ist z. B. homolog dem punktierten relativen Zykel 1' 2', der ganz unterhalb γ liegt, und daher gleich der 1-Kette 0 zu setzen ist. Daher ist der relative Zykel 1' 0 2' nullhomolog mod $\{J < \gamma\}$. Dagegen ist der relative Zykel 1 0 2 nicht nullhomolog mod $\{J < \gamma\}$. Er läßt sich bei festgehaltenen oder nur unterhalb γ veränderlichen Randpunkten nicht

vom Sattelpunkt herunterziehen, ohne die Punktmenge $\{J \leq \gamma\}$ zu verlassen, und ist überhaupt in $\{J \leq \gamma\}$ nicht homolog einer unterhalb γ gelegenen 1-Kette. Einem Sattelpunkt kommt also eine und offenbar nur eine Klasse nicht nullhomologer relativer 1-Zykeln zu. Die erste Typenzahl eines Sattelpunktes ist daher $m^1 = 1$. Die Typenzahl der Dimension 0 dagegen ist $m^0 = 0$. Denn ein Punkt von $\{J \leq \gamma\}$ läßt sich immer innerhalb $\{J \leq \gamma\}$ vom Sattelpunkt weg unter γ hinunter deformieren. Die zweite Typenzahl m^2 ist ebenfalls $= 0$.

In einem Minimum gibt es offenbar nur einen relativen Zykel der Dimension 0, den Minimalpunkt selbst, und er ist nicht nullhomolog, weil unterhalb des Minimalwertes überhaupt keine Punkte liegen. Die Typenzahlen des Minimums sind also

$$m^0 = 1, \quad m^1 = 0, \quad m^2 = 0.$$

In einem Maximum dagegen gibt es einen nicht nullhomogen relativen 2-Zykel. Z. B. läßt sich die Kappe, die das absolute Maximum der Fig. 2 bedeckt, nicht unter Festhaltung der Krempe vom Maximum herunterziehen, und sie ist nicht innerhalb $\{J \leq \gamma_8\}$ homolog einer ganz unterhalb γ_8 gelegenen in den Rand eingespannten Fläche. Ein Punkt oder eine durch das Maximum hindurchgehende Strecke läßt sich dagegen wegziehen. Es sind also die Typenzahlen des Maximums einer Fläche

$$m^0 = 0, \quad m^1 = 0, \quad m^2 = 2.$$

Wie in diesem Beispiel, so sind allgemein die Typenzahlen eines nichtausgearteten stationären Punktes durch den Trägheitsindex k nach der Formel bestimmt

$$(7) \quad m^i = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Die topologische Definition der Typenzahlen ermöglicht es aber, auch die ausgearteten stationären Punkte zu klassifizieren. Man weiß, wie verwickelt die Vorkommnisse selbst bei einer analytischen Funktion J in der Umgebung eines stationären Wertes sein können, wenn man über die Koeffizienten, mit denen die Entwicklung beginnt, keine Voraussetzungen macht. Typenzahlen gibt es dagegen immer.

Betrachten wir z. B. den Affensattel, für den die Formeln (7) ihren Sinn verlieren. Über die drei Täler, die vom stationären Punkt ausgehen, lassen sich drei eindimensionale relative Zykeln hängen: 1 0 2, 2 0 3, 3 0 1. Aber sie sind nicht homolog*unabhängig voneinander. Die Summe zweier von ihnen ist homolog dem dritten, weil die Addi-

tion mod 2 erfolgt.⁶⁾ Daher ist die erste Typenzahl des Affensattels $m^1 = 2$.

Wir können nun leicht stationäre Punkte konstruieren, bei denen mehr als eine Typenzahl von 0 verschieden ist. Beispielsweise ist der Nullpunkt für die Funktion

$$J = (-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{9}x_3^2)$$

offenbar ausgeartet stationär. Die Fläche $J = 0$ besteht aus zwei ineinander geschachtelten Kegeln; zwischen beiden ist $J > 0$, auf ihnen $= 0$, sonst < 0 . Es gibt einen nicht nullhomogenen 2-Zykel, repräsentiert durch die schraffierte Kreisscheibe der Fig. 6, und zwei homolog unabhängige 1-Zykeln wie im Fall des Affensattels. Es ist daher

$$m^1 = 2, \quad m^2 = 1,$$

alle übrigen Typenzahlen sind 0.

Nun gelten für die Typenzahlen die Morseschen Formeln ebenfalls, was hier nicht bewiesen wird. Man hat nur die Anzahl der nicht ausgearteten stationären Punkte vom Trägheitsindex k in den Morseschen Formeln (6) durch die Summe M^k der k -ten Typenzahlen aller stationären Punkte zu ersetzen. Ja, die topologische Einführung der Typenzahlen setzt nicht einmal die Differenzierbarkeit der Funktion J voraus, eine Tatsache, die die Hauptanwendung der Morseschen Formeln, nämlich die auf die Variationsrechnung, überhaupt erst möglich macht.

Wir heben insbesondere die Gültigkeit der allgemeinen Morseschen Ungleichungen

$$M^k \geq R^k$$

hervor, die in Worten folgendes besagen: *Die Summe der k -ten Typenzahlen über alle stationären Punkte ist mindestens gleich der k -ten Zusammenhangszahl.*

⁶⁾ In der Kettenaddition mod 2 hat der Terminus modulo zahlentheoretische, im relativen Zykel einer Teilmenge eine nicht damit zu verwechselnde topologische Bedeutung.

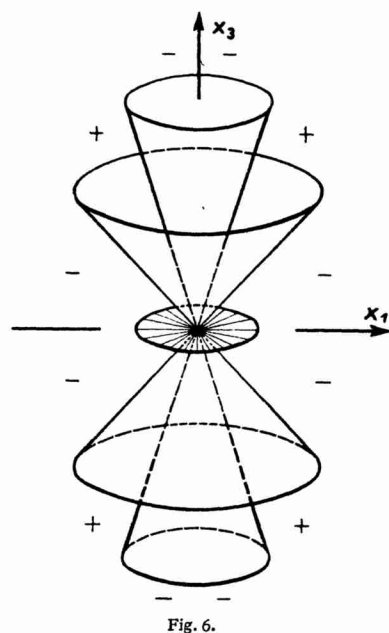


Fig. 6.

Die früher in Formel (5) gegebene Bedeutung dieser Ungleichungen ordnet sich jetzt als Sonderfall der allgemeinen Gültigkeit unter, denn wenn alle stationären Punkte nicht ausgeartet sind, so stimmt nach Formel (7) die Summe der k -ten Typenzahlen mit der Anzahl der stationären Punkte vom Index k überein.

Damit ist das Hauptergebnis, auf das der Vortrag hinweisen wollte, angedeutet.

§ 3. Mindestzahl stationärer Punkte.

In § 2 haben wir die Morseschen Formeln auf beliebig ausgeartete stationäre Punkte erweitert. Dafür haben wir in den Morseschen Ungleichungen Abschätzungen für die Summe der Typenzahlen, nicht mehr wie in § 1, für die Anzahl der stationären Punkte erhalten. In den Anwendungen interessieren aber meist mehr die Mindestzahlen der voneinander verschiedenen stationären Punkte als die Summe der k -ten Typenzahlen. Beispielsweise will man wissen, wie viele verschiedene stationäre Punkte eine Funktion J auf dem topologischen Produkt dreier Kreise mindestens hat, ob diese nun ausgeartet sind oder nicht. Die Beschränkung auf nichtausgeartete stationäre Punkte führt ebenso wenig zu erwünschten Ergebnissen wie die Kenntnis der Summe der k -ten Typenzahlen beliebig ausgearteter stationärer Punkte.

Aus den Morseschen Formeln kann man — immer unter der Voraussetzung isolierter stationärer Punkte — nur schließen, daß wenigstens ein Minimum (charakterisiert durch die Typenzahl $m^0 = 1$), ein Maximum (charakterisiert durch die Typenzahl $m^n = 1$) und (für $n > 1$) entweder mindestens ein weiterer — unter Umständen ausgearteter — stationärer Punkt auf der geschlossenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit vorhanden ist, dessen Typenzahlen der Dimensionen 1 bis $n - 1$ dann so beschaffen sein müssen, daß die Morseschen Ungleichungen $M^k \geq R^k$ befriedigt werden, oder aber, daß, falls alle stationären Punkte nicht ausgeartet sind, mindestens so viele vorhanden sind, als die Summe aller Zusammenhangszahlen beträgt.

Auf einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht (Henkelzahl) h kann man nun leicht eine Funktion J konstruieren, die außer einem Minimum und einem Maximum genau einen stationären Punkt mit den Typenzahlen $m^1 = 2h (= R^1)$, $m^0 = m^2 = 0$ besitzt. Wie steht es aber in höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten, z. B. im dreidimensionalen projektiven Raum? Ist da 1 ebenfalls die Mindestzahl unter Umständen ausgearteter stationärer Punkte außer dem Minimum und Maximum?

Eine über die Morseschen Ungleichungen hinausgehende Abschätzung der Anzahl stationärer Punkte liefert da der Satz, daß *mindestens so viele stationäre Punkte vorhanden sind, wie die Kategorie der Mannigfaltigkeit angibt.*⁷⁾

Unter der *Kategorie* einer Mannigfaltigkeit versteht man die Mindestzahl von abgeschlossenen Teilmengen, die zusammen die Mannigfaltigkeit überdecken und die sich einzeln auf der Mannigfaltigkeit in einen Punkt (homotop) deformieren lassen. Die Kategorie einer Strecke, einer Kreisscheibe, allgemeiner eines n -dimensionalen Elementes (soviel wie n -dimensionale Vollkugel oder deren topologisches Bild) ist 1, die der n -dimensionalen Sphäre 2, die des n -dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^n$ ebenso wie die des topologischen Produktes aus n Kreisen $n + 1$, und die des topologischen Produktes aus Kugelfläche und Kreislinie 3, wie man beweisen kann.

Die Kategorie eines zusammenhängenden n -dimensionalen Komplexes ist nach einem Satz von Lusternik und Schnirelmann (l. c. S. 33) höchstens $= n + 1$. Den Beweis kann man leicht so führen: Als erste auf dem Komplex in einen Punkt deformierbare Teilmenge wählt man die Sterne der zweifachen Normalunterteilung des Komplexes, die zu Mittelpunkten die Mittelpunkte der n -Simplexe haben, als zweite Teilmenge die Sterne um die Mittelpunkte der $(n - 1)$ -Simplexe und so fort bis zu den Sternen um

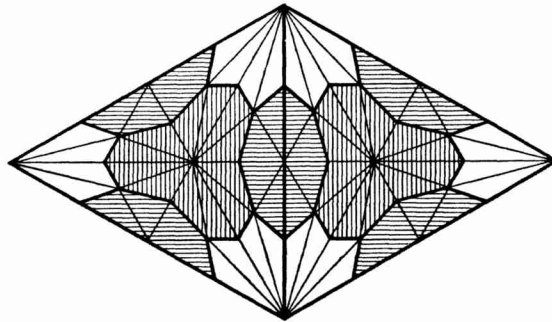


Fig. 7.

die 0-Simplexe. Die Fig. 7 zeigt diese Sterne an einem aus zwei Dreiecken bestehenden zweidimensionalen Komplex. Diese $n + 1$ Teil-

7) Diesen wichtigen Satz entnehme ich ebenso wie den Begriff der Kategorie der Schrift: L. Lusternik und L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les Problèmes variationels (Actual. sci. indust. III 188, Paris 1934). Seine Anwendung auf die Variationsrechnung zum Zweck der Abschätzung der Anzahl geschlossener Geodätischer scheitert, solange man seine Übertragung auf beliebige metrische Räume und die Kategorie dieser Räume nicht kennt. Wie weit in dieser Richtung Ergebnisse vorliegen, entzieht sich meiner Kenntnis, da angeblich vorhandene russische Arbeiten über den Gegenstand mir nicht zugänglich sind. — Man vergleiche ferner Gordon, On the minimal number of critical points of a real function on a manifold, Rec. math. Moscou 4 (1938) p. 105—113.

mengen überdecken zusammen den ganzen Komplex, und jede läßt sich auf ihm in einen Punkt deformieren.

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich sogar mit $n + 1$ n -dimensionalen Elementen überdecken.⁸⁾

Um nun den behaupteten Zusammenhang zwischen der Kategorie und der Mindestzahl der stationären Punkte herzustellen, dürfen wir annehmen, daß die Funktion J auf unserer geschlossenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit nur endlich viele stationäre Punkte $g_1, \dots, g_r$ hat. Wir setzen ferner voraus, daß die Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet ist, damit wir von Falllinien von J (den orthogonalen Trajektorien der Niveaulächen $J = \text{const.}$) reden können.

Jeden Punkt g_e umgeben wir mit einer Kugelumgebung $\mathfrak{U}_e$ (in dieser Metrik), deren Radius so klein ist, daß alle Umgebungen punktfremd sind. Wir ordnen dann jeder Umgebung $\mathfrak{U}_e$ eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{N}_e$ zu. $\mathfrak{N}_e$ besteht aus Stücken von Falllinien, die $\mathfrak{U}_e$ treffen, und zwar wird jede Falllinie im Sinne wachsender und abnehmender J -Werte so weit zu $\mathfrak{N}_e$ gerechnet, bis sie in eine andere der Umgebungen $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r$ eindringt. Die Punktmengen $\mathfrak{N}_e$ überdecken also einander.

$\mathfrak{N}_e$ läßt sich in einen Punkt deformieren, indem man die Fallienstücke gleichmäßig nach $\mathfrak{N}_e$ zusammenzieht und dann $\mathfrak{U}_e$ in einen Punkt deformiert. Da jede Falllinie in einer der Umgebungen $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r$ mündet, so gehört jeder Punkt unserer Mannigfaltigkeit einer der Teilmengen $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_r$ an. Daher ist die Kategorie der Mannigfaltigkeiten höchstens r , was zu beweisen war.

§ 4. Einige Anwendungen.

I. C sei eine zweimal stetig differenzierbare geschlossene *Raumkurve*. Dann gibt es *mindestens zwei stationäre Sehnen*, d. h. Sehnen, die auf C in ihren Endpunkten senkrecht stehen.

Die sämtlichen Sehnen von C , als Elemente einer Menge aufgefaßt, bilden bei naheliegender Festsetzung von Umgebungen eine berandete Mannigfaltigkeit. Ihre topologische Struktur hängt offenbar nicht von der Gestalt der Raumkurve ab. Wir können daher, um sie zu bestimmen, annehmen, C sei eine Kreislinie in der projektiven Ebene $\mathfrak{U}$. Ordnet man dann jeder Sehne von C ihren Pol in $\mathfrak{U}$ zu, so entsteht eine eindeutige stetige Beziehung zwischen den Punkten von $\mathfrak{U}$ außer-

⁸⁾ A. Bassi, Su alcuni nuovi invarianti delle varietà topologiche. Ann. Mat. pura appl. 16 (1937) p. 275—297.

halb und auf dem Rande von C und den Sehnen von C . Die Mannigfaltigkeit der Sehnen ist also die gelochte projektive Ebene oder, was dasselbe ist, das Möbiusband.

Auf ihm ist die Länge der Sehnen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die auf dem Rande, und sonst nirgends verschwindet. Dann gibt es aber im Innern des Möbiusbandes mindestens zwei stationäre Punkte, nämlich ein Maximum und einen weiteren Punkt, dessen Typenzahl der Dimension 1 von Null verschieden ist. Es muß nämlich ein stationärer Punkt vorhanden sein, an dem die Mittellinie des Möbiusbandes hängen bleibt, wenn man sie längs der Falllinien absinken läßt. Gäbe es keinen solchen Punkt, so könnte man die Mittellinie längs der Falllinien bis auf den Rand des Möbiusbandes (zum Funktionswert 0) deformieren. Das ist aber nicht möglich, weil die Mittellinie nicht homolog dem Rande, also nicht in den Rand deformierbar ist.

Da nun einem stationären Wert der Längenfunktion auf dem Möbiusband eine stationäre Sehne zugehört, so ist die Behauptung bewiesen. — Bei der Ellipse entspricht der großen Achse das Maximum auf dem Möbiusband, der kleinen Achse der Sattelpunkt.

II. Zwei geschlossene Raumkurven C_1 und C_2 , zweimal stetig differenzierbar und punktfremd, seien gegeben. Zwischen einem Punkt auf C_1 und einem auf C_2 wird eine Kette aufgehängt, die so lang ist, daß man die beiden Aufhängepunkte unabhängig voneinander auf den Kurven überall hin verschieben kann. Gefragt wird nach den *Gleichgewichtslagen der Kette*, d. h. nach den Aufhängepunkten, in denen die Kette senkrecht auf C_1 und C_2 steht.

Die Aufhängepunkte sind durch die Bogenlängen s_1 und s_2 bestimmt, die ihnen auf C_1 und C_2 , gemessen von festen Anfangspunkten, entsprechen. Die möglichen Lagen der Kette ergeben daher eine Ringfläche, das topologische Produkt der Kurven C_1 und C_2 . Jeder Lage der Kette kommt eine bestimmte potentielle Energie zu, die eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von s_1 und s_2 , also auf der Ringfläche, ist und stationäre Punkte genau für die Gleichgewichtslage der Kette besitzt. Da die Ringfläche die Kategorie 3 hat, so gibt es mindestens drei Gleichgewichtslagen.

Als Übungsaufgabe sei die Ermittlung der Anzahl der Lichtstrahlendreiecke gestellt, die an drei spiegelnden, zweimal stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven der Ebene auftreten.

Ferner sei auf die Beispiele der in Anmerkung 7 angeführten Schrift (l. c. S. 47) hingewiesen.

(Eingegangen am 5. 7. 1939.)